数理解析研究所講究録
98巻 1970年 158-164

Complete Matching のとれる確率
－パズルの複雑さについて－

京大 情報工学　矢島脩三

§1．はじめに

n件の仕事があって，n人が，1人1件，いずれかの仕事を受け持たされ，n件の仕事をすべて処理しようとする。ただし，各人には，志望する仕事と，志望しない仕事の区別がある。すべての人の志望を満たすように各人に仕事を割当てる問題は，personal assignment problem，グラフでは bipartite graph の complete matching として知られている。この問題は，また，$n \times n$ の将棋盤上に，n個の飛車を互いに捕られないように置く nontaking rooks の問題としても知られている[1]。

ここでは，この問題を別の観点より眺める。各人に対し，独立に，優先順位をつけず，志望する仕事を k 個，重複なしに，しかも，各々等確率にランダムに出させて，各人に仕事を assign するものとして，それが可能となる，すなわち，complete matching のとれる確率 P_n^k を求める。

つまり，各人とも，志望にどのくらいの幅があれば（心のゆとりがあれば，志望をどのくらい出させれば）trouble なしに assignment が可能になるかを評価しようというのである。

これは，また，飛車の場合，飛車を置く候補地を，各飛車につき，それぞれ独立に k 個ランダムに定め，その候補地の中に，種々，飛車を置いてみて nontaking rook が作れるかどうかを調べ，各 k に対する nontaking rook の作れる確率 P_n^k を求めようということである。

当然，$P_n^{k=0}=0 \leqq P_n^k \quad (k=0,\cdots,n) \leqq P_n^{k=n}=1$ であり，k はゲームやパズルでいうと，どのくらいの範囲で打つ手を探すかに対応するわけで，$P_n^k \cong \frac{1}{2}$ となる $k;n$ をもって，この問題の難易度または"複雑さ"と定義する。他の種々のゲームやパズルにおいても，複雑さにつき類似の定義ができるであろう。

この問題は，学生の研究室志望分属，学生実験テーマの選択に関連して気付いた問題であり，研究室の大学院生にクイズとして出題していた。しかし，まだ，この解は，ほんの一部しか求まっておらず，計算も進行していないのであるが，本研究会に，この問題が紹介されたとの事であり，とりあえず，現在までに得られた結果を報告する。

志望数 $k=0, 1, n-1, n$ は trivial であるが，あとは意外に難しく，$k=2$ は謝によって [2]，$k=n-2$ は独立に，謝 および 著者によって計算された。

著者は，この P_n^k が，n が大きくなると，ある k/n の近傍において，急激に変化するという予測を立てており，その検証が，このタイプの問題の興味の中心である。

§2. $P_n^{k=1}$，$P_n^{k=n-1}$ について

$P_n^{k=1}$ は，各人が，それぞれ 1 志望を出す。そのあらゆる場合の数は n^n，complete matching のとれるのは，それが，permutation になっている場合の数 $n!$ である。よって，

$$P_n^{k=1} = \frac{n!}{n^n} \tag{1}$$

$P_n^{k=n-1}$ は，$n-1$ 個の仕事を志望するというのを，逆に，1 個の仕事を拒否すると考える。ある 1 つの仕事が，みんなにそろって拒否された場合，その場合のみ complete matching は不能であるから，

$$P_n^{k=n-1} = \frac{n^n - n}{n^n} \tag{2}$$

§3. $P_n^{k=2}$ について [2]

各人より提出された志望でもって，はたして complete matching がとれるかどうかの判定に，P. Hall の定理[3]を用いる。この定理を，本問題の場合に書きなおして示す。

[定理] n 人の各々が志望する k 個の仕事よりなる集合を S_i $(i=1,\cdots,n)$ とし，$S=\{S_i \mid i=1,\cdots,n\}$ とする。各 S_i より，それぞれ異なった一つの仕事（distinct representative）を取り出せるための（すなわち，complete matching がとれるための），必要十分条件は，各 $\lambda=k+1, k+2,\cdots, n$ につき，任意に λ 個の互いに異なるインデクス $i_1, i_2, \cdots, i_\lambda \in \{1,\cdots,n\}$ を定め $S_{i_1}, S_{i_2}, \cdots, S_{i_\lambda} \in S$ を取り出したとき，それらの中に少くとも λ 個の異なる仕事が含まれていることである。

謝[2]は，これを基本にして $P_n^{k=2}$ を求めているが，相当複雑な式になっている。ここでは，謝の示した $P_n^{k=2}$ の比較的よい上限 $\hat{P}_n^{k=2}$ を示す。

$$\hat{P}_n^{k=2} = \frac{n!}{2!}\left(\frac{2}{n}\right)^n \qquad (3)$$

§4. $P_n^{k=n-2}$ について

$n-2$ 個の志望のかわりに，2 個の拒否を出してもらい，complete matching のとれない確率 $R_n^{l=2} = 1 - P_n^{k=n-2}$ を求める。前節の P. Hall の定理の逆，すなわち，complete matching のとれない場合を述べると，

［定理］ n 人の各々が拒否する l 個（$l = n-k$）の仕事よりなる集合を V_i $(i=1,\cdots,n)$ とし，$V = \{V_i \mid i=1,\cdots,n\}$ とする。complete matching のとれないための必要十分条件は，各 $\lambda = n-l+1$ $(=k+1)$，$\cdots$，$n-1$，n につき，任意に λ 個の互いに異なるインデクス $i_1, i_2, \cdots, i_\lambda \in \{1,\cdots,n\}$ を定め $V_{i_1}, V_{i_2}, \cdots, V_{i_\lambda} \in V$ を取り出したとき，どの V_{i_j} $(j=1,\cdots,\lambda)$ にも共通に，少くとも $n-\lambda+1$ 個，同じ仕事を含んでいる（各人が共に拒否している）ことである。

$l=2$ の場合，$\lambda = n, n-1$ であり，$\lambda = n$ のとき，すべての人に 1 ないし 2 個共通に拒否される場合，$\lambda = n-1$ のとき，2 個共通に拒否される場合を計算する。結果を示す。

$$1 - P_n^{k=n-2} = R_n^{l=2} = \frac{2^n}{n^{n-1}} + \frac{1}{2\cdot\binom{n}{2}^{n-1}}\left(n^3 - 5n^2 + 6n - 2\right) \qquad n \geqq 3 \qquad (4)$$

§5. $(k/n\ ,\ P_n^k)$ のグラフ

$n=2, 3, \cdots, 6$ までにつき，横軸を $k/n\ (\stackrel{\text{def.}}{=} \alpha)$，縦軸を P_n^k にとり，n をパラメータにして，各点を適当になめらかに接続すると下図のようなグラフとなる。n が増加するに従って，$P_n^k=\frac{1}{2}$ となる k 自身は増加するが，k/n は減少している。

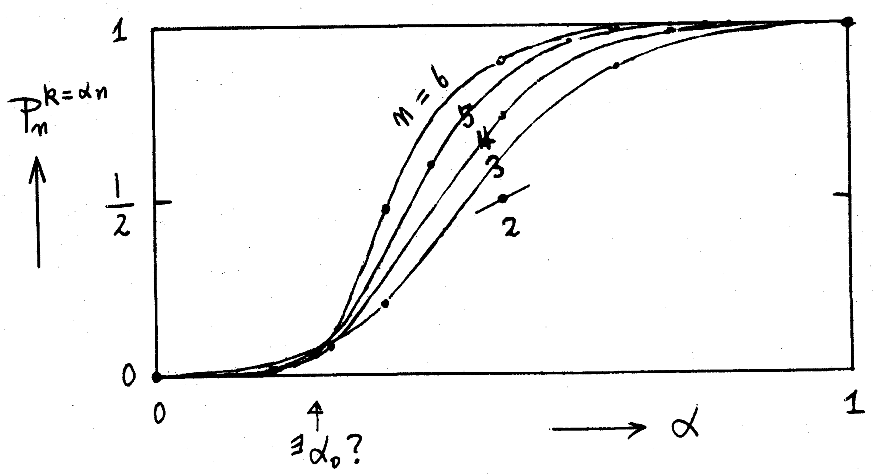
[Conjecture] つぎの α_0（臨界値）が存在する。

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{k=\alpha n} = \begin{cases} 0 & \alpha < \alpha_0 \\ 1 & \alpha > \alpha_0 \end{cases}$$

$P_n^k=\frac{1}{2}$ を与える α を $\alpha_{\frac{1}{2}}(n)$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{\frac{1}{2}}(n) = \alpha_0$$

このような臨界値 α_0 の存在するパズルのクラスは，α_0 をもって，このクラスのパズルの複雑さと定義する。



§6. おわりに

$P_m^{k=n-3}$ は，著者と謝の結果が一致しておらず報告できなかった。その他の P_m^k は，まだ求まっていない。式の形でなく，Algorithm の形で求め，あと，計算機にたよることになるかもしれない。

ここで紹介した単純な問題でも，その複雑さを求める計算は極めて困難なようであり，simulation で，その概略値を求めるのも，この問題を調べる一手段であろう。

参考文献

[1] C. L. Liu : Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-Hill Book Co., 1968

[2] 謝章文 : ある Simple Graph の Matching のとれる確率，電子通信学会 回路とシステム理論研究会資料 1970年1月24日

[3] Philip Hall : On Representatives of subsets, J. London Math. Soc., 10 (1935), 26-30

または，Marshall Hall, Jr. : Combinatorial Theory, Blaisdell Pub. Co., 1967 p. 44